Els camps de galga clàssics i la interacció gravitatòria

Josep Graells* **i Carme Martín**†
Departament de Física Aplicada i Òptica. UB

Introducció

El present article es pot considerar complementari d'«Els camps de galga clàssics i la interacció electromagnètica», també publicat anteriorment en la *Revista de Física*. Com que ens hi referirem algunes vegades, l'anomenarem ref. 1. Tot i que s'ha procurat ambdós articles que siguin de lectura independent, no s'ha d'oblidar que un dels objectius del treball és descriure i comparar les dues interaccions clàssiques, això és, l'electromagnètica i la gravitatòria, dins el marc de les teories de galga. Amb aquesta reformulació creiem que afloren molt nítidament les analogies i diferències fisicomatemàtiques estructurals, des d'un punt de vista no quàntic, d'ambdues interaccions.

La base metodològica del present article s'exposa en l'apartat següent. En aquest apartat i seguint el consell de W. Pauli, se situa en primer terme la visió local einsteiniana, ja que opinem que esdevé totalment adequada per erigir la formulació galga de la relativitat general. Cal tenir present, però, que ja el 1929 H. Weyl va anticipar la visió galga de la interacció gravitatòria, i que el 1956 va ésser completada i generalitzada per R. Utiyama.

En els quatre apartats següents es desenvolupa el formalisme galga, i s'evidencia que la descripció completa del fenomen gravitatori clàssic requereix els tres nivells (mètrica, camp de galga, curvatura). Es demostra la inobservabilitat física de l'espaitemps minkowskià. L'entitat mesurable i per tant real és l'espaitemps dinàmic de la relativitat general, sobre el qual es construeix la visió geomètrica galga. Aquest fet li dóna la natura peculiar i única com a teoria de galga, atès que els camps de galga gravitatoris són deduïbles a partir del nivell mètric. D'aquesta manera s'implementa en la física gravitatòria la peculiaritat que **tots** els sistemes físics en posseir energia generen camp gravitatori, i a la vegada el camp gravitatori, via les estructures geomètriques de l'espaitemps que el defineixen, reacciona sobre **tots** els sistemes físics.

En l'apartat «Conclusions» se sintetitzen alguns aspectes bàsics de les teories de galga i es concreten per a les dues interaccions clàssiques.

Finalment en l'«Apèndix» s'exposen aplicacions rellevants per a cada nivell (mètrica, camp de galga, curvatura) de la interacció gravitatòria.

La metodologia local einsteiniana i la invariància galga en la interacció gravitatòria

Per motius didàctics i coherents amb els desenvolupaments exposats en la ref. 1, es partirà de l'espaitemps de la relativitat especial per intentar explicar la interacció gravitatòria dins del marc de les teories de galga. Per bé que, seguint el consell de W. Pauli, s'incorporarà de bell antuvi la visió local einsteiniana. Així, s'evitaran les inconsistències inherents a la teoria lineal global minkowskiana, ja que, com s'explicarà més endavant, l'espaitemps minkowskià s'ha de buidar de contingut físic.

Per formular la visió local o principi d'equivalència einstenià com a principi de galga de la interacció gravitatòria, s'estima pertinent seguir J. A. Wheeler i resumirlo amb els tres punts següents:

1. La física és sempre i en tot lloc *localment* minkowskiana, o sia, localment les lleis de la física (clàssiques o quàntiques) segons es formulen en la relativitat especial són vàlides.

2. Aquesta simplicitat es mostra molt clarament en un referencial inercial *local*.

3. Per comprovar la inercialitat *local* del referencial inercial, s'ha de comprovar la ingravidesa. Hom pot imaginar un referencial inercial mitjançant un laboratori en caiguda lliure (ascensor d'Einstein). Els experiments s'han de dissenyar localment, o sia, s'han d'efectuar dins del laboratori i ser de curta durada, per tal d'inferir o ratificar les lleis diferencials de la física en la relativitat especial. (Més endavant es concretarà l'abast espacial i temporal del referencial inercial local).

Una primera conseqüència del principi d'equivalència és que les partícules sense estructura interna, o sia monopolars, sotmeses només a la interacció gravitatòria,

*Josep Graells (Cervera, 1946) és pèrit industrial elèctric per l'Escola d'Enginyeria Tècnica Industrial de Terrassa (1967) i doctor en Física per la Universitat de Barcelona (1978).

†Carme Martín (Barcelona, 1950) és doctora en Física per la Universitat de Barcelona (1981) i és professora del col·legi La Salle Gràcia.

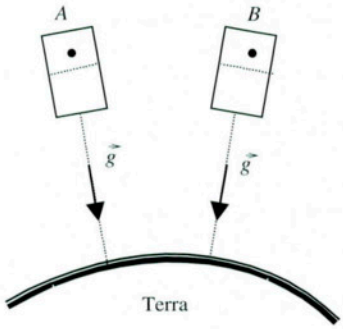


Figura 1: *Dins un laboratori en caiguda lliure en un camp gravitatori, una partícula monopolar en repòs resta en repòs, i els senyals electromagnètics es propaguen en línia recta amb velocitat* c. *Ambdós laboratoris, A i B, estan mútuament accelerats*

efectuen un moviment rectilini i uniforme, i els senyals electromagnètics es propaguen en línia recta amb velocitat c, respecte del referencial inercial local en què s'observen. D'això es desprèn que les partícules en caiguda lliure passin a ser l'estàndard dels moviments inercials. Per tant, en els referencials inercials locals s'ha de suposar que la interacció gravitatòria s'ha compensat o neutralitzat localment, suposició ratificada per la mesura zero dels seus acceleròmetres. Aquesta visió, en contrapartida, implica que s'ha d'acceptar l'acceleració mútua entre referencials inercials, per propers que estiguin l'un de l'altre. Sols cal imaginar dos laboratoris, per exemple dues naus espacials, en caiguda lliure en el camp gravitatori de la Terra, per visualitzar-lo (vegeu la figura 1). Òbviament l'acceleració mútua s'origina per les inhomogeneïtats del camp gravitatori, o sia, pels gradients de camp (forces de marea), que sí que són detectables dins de cada laboratori.

En resum, el principi d'equivalència requereix de molts referencials inercials *locals*, accelerats mútuament, en front dels referencials inercials *globals* de la relativitat especial. Des del punt de vista del rigor matemàtic, s'ha de tenir en compte en cada esdeveniment x un referencial inercial local $\Sigma(x)$. Per tant, les transformacions de Lorentz L^i_j de $\Sigma(x)$, també han de passar a ser funcions de l'esdeveniment x, $L^i_j(x)$, o sia, els sis paràmetres del grup de Lorentz passen a ser funcions de l'esdeveniment. És a dir, el principi d'equivalència implica que el grup de Lorentz *global* L passa a ser *local* $L(x)$. Aquesta conseqüència, i atès que el principi de galga determina les modificacions fisicomatemàtiques que experimenta una teoria física que té una simetria global en forçar-la a ser local, obre la possibilitat immediata d'intentar construir una teoria galga de la interacció gravitatòria, en què el grup de galga s'identifiqui amb el grup de Lorentz. A la taula 1 es resumeix l'estratègia per aplicar a la interacció gravitatòria el principi de galga.

En els dos apartats següents es desenvoluparà l'esquema conceptual anterior. Per començar cal tenir present que, en el domini comú a dos referencials inercials locals, la transformació de coordenades associada a ambdós referencials no pot ser lineal, a causa de l'acceleració mútua. Per tant, també serà no lineal la transformació entre el sistema de coordenades lorentzià $\{x^\alpha\} \in \Sigma$ de M_4 i les coordenades $\xi^i \in \Sigma(x_0)$ del referencial local en l'esdeveniment x_0, fix però arbitrari. A partir d'ara els índexs de les magnituds tensorials referides al sistema de coordenades lorentzià Σ de M_4 es representaran amb lletres de l'alfabet grec $(\alpha, \beta, \gamma \ldots)$ i quan es refereixin al referencial inercial local $\Sigma(x_0)$ amb lletres de l'alfabet llatí (i, j, k, l...).

Aquest canvi de coordenades es representarà de la manera següent (vegeu la fig. 2):

$$\Sigma \to \Sigma(x_0),$$

$$x^\alpha \to \xi^i = \xi^i(x^\alpha; x_0), \tag{1}$$

On s'explicita que l'esdeveniment x_0 de coordenades x_0^α en Σ és l'origen de $\Sigma(x_0)$, o sia, $\xi^i(x_0^\alpha; x_0) = 0$. El domini d'aplicabilitat de $\Sigma(x_0)$ el defineix la precisió dels experiments que s'han de realitzar. Per exemple, en la frontera de $\Sigma(x_0)$ s'ha de poder detectar que l'equació de la línia de món d'una partícula en caiguda lliure se separa infinitesimalment de la rectilinitat minkowskiana $d^2\xi^i/(d\xi^0)^2 \neq 0$. Per tant, com més precisos siguin els experiments, més petita serà la mida de $\Sigma(x_0)$. L'esdeveniment x_0 també s'escollirà com a esdeveniment origen del sistema de coordenades lorentzià Σ, o sia, $x_0^\alpha = 0$.

Sigui $\{e_i(x_0)\}$ la tètrada de vectors ortonormalitzats definits per $\Sigma(x_0)$, $(\eta_{ij} = e_i(x_0) \cdot e_j(x_0))$, i $\{E_\alpha\}$ els de Σ, $(\eta_{\alpha\beta} = E_\alpha \cdot E_\beta)$. L'ortonormalització d'ambdues tètrades implica que ha d'existir una transformació de Lorentz $L^i_\alpha(x_0)$ que els relacioni:

$$E_\alpha = L^i_\alpha(x_0) e_i(x_0), \tag{2}$$

on $(\eta_{\alpha\beta} = (\eta_{ij}(x_0)) = diag(-1, 1, 1, 1)$ és la mètrica minkowskiana $\eta_{\alpha\beta} = E_\alpha E_\beta = L^i_\alpha(x_0) L^j_\beta(x_0) \eta_{ij}(x_0)$.

Tenint en compte la llei de transformació (1), l'equació (2) es pot expressar

$$E_\alpha = \left(\frac{\partial \xi^i (x^\alpha; x_0)}{\partial x^\alpha} \right)_{x_0} e_i(x_0).$$

O sia, en x_0 les derivades primeres de (1) coincideixen amb les transformacions de Lorentz (2):

$$L^i_\alpha(x_0) = \left(\frac{\partial \xi^i (x^\alpha; x_0)}{\partial x^\alpha} \right)_{x_0} \tag{3}$$

física sense interacció gravitatòria	→	física amb interacció gravitatòria
Visió: *global*		**Visió: *local***
Referencials inercials *globals* Σ, definits en l'espai-temps minkowskià M_4.		Referencials inercials locals $\Sigma(x_0)$, definits en cada esdeveniment x_0.
Coordenades inercials (lorentzianes) *globals* x^α		Coordenades inercials locals ξ^i, associades a un entorn de $x_0 : \xi^i(x; x_0)$
Grup de Lorentz rígid: $x^{\alpha'} = L^{\alpha'}_{\beta} x^\beta$		Grup de Lorentz galga: $\xi^{i'}(x; x_0) = L^{i'}_{j}(x_0)\xi^j(x; x_0)$
Mètrica minkowskiana global: $\eta_{\alpha\beta}$		Mètrica minkowskiana local $\eta_{ij}(x; x_0)\big\|_{x_0} = \eta_{ij}$

Taula 1: *Estratègia per aplicar el principi de galga a la interacció gravitatòria*

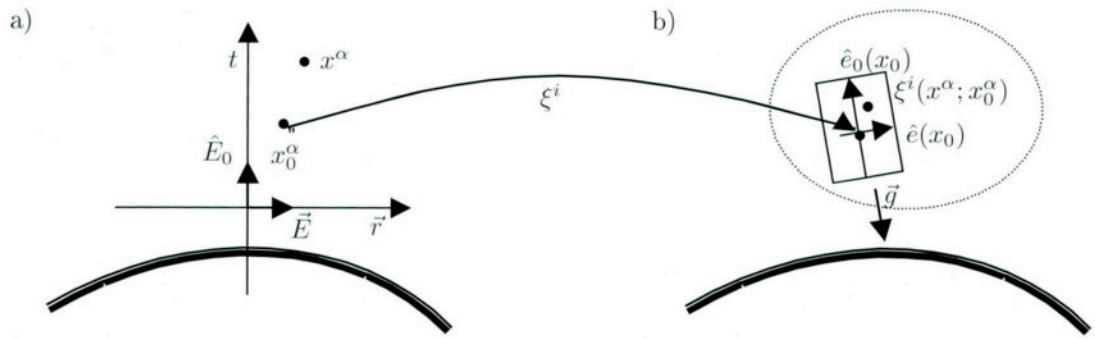


Figura 2: *a) Espaitemps minkowskià M_4. Sistema de coordenades lorentzià $x^\alpha \in \Sigma$. b) Referencial inercial local $\Sigma(x_0)$. Coordenades inercials $\xi^i(x^\alpha; x_0^\alpha)$*

Per exemple, si el vector energia-moment lineal $p(x_0)$ d'una partícula en l'esdeveniment x_0 té per components $p^\alpha(x_0)$ respecte a Σ, i $p^i(x_0)$ respecte a $\Sigma(x_0)$, o sia:

$$p(x_0) = p^\alpha(x_0)E_\alpha = p^i(x_0)e_i(x_0), \qquad (4)$$

llavors es verifica

$$p^i(x_0) = \left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x^\alpha}\right)_{x_0} \quad p^\alpha(x_0) = L^i_\alpha(x_0)p^\alpha(x_0),$$

on en la primera igualtat s'ha aplicat la llei de transformació estàndard dels components d'un vector i en la segona l'equació (2).

Les dues darreres igualtats exemplifiquen que les relacions entre magnituds on únicament intervenen les derivades primeres de $\xi^i(x^\alpha; x_0)$, són de caràcter purament algebraic, ja que es limiten a descompondre o analitzar les magnituds en un únic esdeveniment, independentment del seu comportament en els esdeveniments infintesimalment propers. Aquesta consideració porta a recordar que la majoria de les lleis fonamentals de la física són diferencials, en determinar o restringir el comportament de les magnituds en un entorn infinitesimal de cada esdeveniment. Per tant esdevé necessari definir com s'ha de quantificar la variació infinitesimal o diferenciació de les magnituds físiques. Aquest punt delicat no és estrictament matemàtic sinó més aviat fisicogeomètric, en què el principi de galga és l'actor principal.

Per exemple, en la ref. 1 ha quedat palès com el principi de galga, per a la simetria U(1), determina el procés de derivació «covariant» en la interacció electromagnètica. En l'apartat següent es demostrarà com el principi d'equivalència, interpretat com a principi de galga del grup de Lorentz, determina en presència de la interacció gravitatòria, el procés de derivació «covariant» via la definició dels camps de galga gravitatoris. Es demostrarà que aquests camps es poden expressar en funció de les derivades parcials segones de $\xi^i = \xi^i(x^\alpha; x_0)$.

Els camps de galga gravitatoris

En l'apartat anterior s'ha demostrat que les derivades primeres de $\xi^i = \xi^i(x^\alpha; x_0)$ estan relacionades amb aspectes purament cinemàtics o algebraics del principi d'equivalència o principi de galga de la interacció gravitatòria. En el present apartat es demostrarà que les derivades segones de $\xi^i = \xi^i(x^\alpha; x_0)$ determinen els camps de galga gravitatoris i, per tant, defineixen el procés de derivació «covariant» de les magnituds físiques en presència de camps gravitatoris. Aquest procés de derivació quantifica a la vegada la influència o l'acoblament del camp gravitatori sobre els sistemes físics.

La concreció d'aquestes consideracions generals és en

principi molt senzilla, bé que no simple. Per començar, s'han de tenir presents els tres punts de l'apartat anterior que defineixen el principi d'equivalència. Aquests punts afirmen que respecte al referencial inercial local $\Sigma(x_0)$ es verifiquen les lleis de la física de la relativitat especial. Esdevé, doncs, obligatori definir la derivació d'una magnitud tensorial en l'esdeveniment x_0 com es fa en la relativitat especial, o sia, mitjançant la derivació dels seus components respecte a $\Sigma(x_0)$. Per fixar les idees es considerarà un vector u, els components del qual són $u^i \in \Sigma(x_0)$ i $u^\alpha \in \Sigma$. O sia, $u = u^i e_i = u^\alpha E_\alpha$, igualtats anàlogues a les de l'equació (4) pel vector energia-moment lineal. Llavors el procés de derivació galga, que en gravitació s'anomena *covariant* i es representa amb el símbol ∇, es defineix:

$$(\nabla u)_{x_0} \equiv e_i(x_0) \left(\frac{\partial u^i}{\partial \xi^k}\right)_{x_0} d\xi^k. \qquad (5)$$

O sia, els components de $(\nabla u)_{x_0}$ són:

$$(\nabla u)^i_k = \left(\frac{\partial u^i}{\partial \xi^k}\right)_{x_0}.$$

Òbviament la definició (5) de ∇ depèn de $\Sigma(x_0)$, per tant és convenient fer-la extensiva a qualsevol sistema de coordenades, per exemple el Σ.

Per calcular $(\nabla u)_{x_0}$ respecte de Σ, sols cal substituir en (5),

$$e_i = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^i} E_\alpha,$$

$$d\xi^k = \frac{\partial \xi^k}{\partial x^\beta} dx^\beta$$

i

$$u^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^\gamma} u^\gamma.$$

Després d'uns càlculs senzills s'obté:

$$(\nabla u)_{x_0} = E_\alpha \left[\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^i} \frac{\partial^2 \xi^i}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} u^\gamma\right]_{x_0} dx^\beta. \qquad (6)$$

La identificació dels camps de galga en les expressions (5) i (6) es facilita desenvolupant $\nabla u = \nabla(u^\alpha E_\alpha) = \nabla(u^i e_i)$ en x_0. En aplicar la regla de Leibniz i tenir en compte que per a una funció escalar f, $\nabla f = df$, ∇u s'expressa:

$$\nabla u = \nabla(u^i e_i) = e_i du^i + (\nabla e_i) u^i \equiv$$
$$e_i \left(\frac{\partial u^i}{\partial \xi^k} + (\nabla_k e_j)^i u^j\right) d\xi^k = \nabla(u^\alpha E_\alpha) =$$
$$E_\alpha du^\alpha + (\nabla E_\alpha) u^\alpha \equiv E_\alpha \left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} + (\nabla_\beta e_\gamma)^\alpha u^\gamma\right) dx^\beta.$$

Els components de les derivades covariants de les tètrades no són sinó els components dels camps de galga respecte del referencial en qüestió. Atès que es representen amb la lletra Γ, es té en x_0:

$$\Gamma^i_{jk} \equiv (\nabla_k e_j)^i_{x_0} = 0, \text{ en } \Sigma(x_0) \qquad (7)$$

$$\Gamma^\alpha_{\gamma\beta} \equiv (\nabla_\beta E_\gamma)^\alpha_{x_0} = \left[\frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^i} \frac{\partial^2 \xi^i}{\partial x^\beta \partial x^\gamma}\right]_{x_0}, \text{ en } \Sigma. \qquad (8)$$

L'equació (7) mostra que en l'esdeveniment x_0, i respecte de $\Sigma(x_0)$, els camps de galga són zero. Això significa que els fenòmens gravitatoris descrits pels camps de galga són compensats o neutralitzats per la inercialitat en x_0 del referencial $\Sigma(x_0)$. Aquest fet no passa respecte del sistema de coordenades Lorentzià Σ, segons demostra l'equació (8), en la qual s'explicita la determinació dels camps de galga mitjançant les derivades segones de ξ^i.

Els camps de galga gravitatoris $\Gamma^\alpha_{\gamma\beta}$, que s'acaben de definir, es corresponen amb els camps de galga o potencial vector A_μ de la interacció electromagnètica. Òbviament, el major nombre de components de Γ enfront de A és degut al fet que el grup de galga de l'electromagnetisme, l'U(1) (vegeu la ref. 1), és uniparamètric (unidimensional), mentre que el grup de Lorentz, en tenir sis paràmetres, és hexadimensional. En aquest aspecte s'hi aprofundirà més endavant. Indiquem, però, que la neutralització en l'esdeveniment x_0 i respecte de $\Sigma(x_0)$ dels fenòmens gravitatoris, deguda a la inercialitat del referencial $\Sigma(x_0)$ [1], té una corresponent analogia en la descripció dels fenòmens electromagnètics. En efecte, si $A_\mu(x_0) \neq 0$ en l'esdeveniment x_0 fix, bé que arbitrari, llavors sempre es pot realitzar una transformació de galga:

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x), \qquad (9)$$

tal que $A'_\mu(x_0) = 0$, ja que sols cal escollir $\alpha(x)$ de manera que en x_0 es verifiqui $\partial_\mu \alpha(x_0) + A_\mu(x_0) = 0$.

La definició geomètrica dels camps de galga $\Gamma^\alpha_{\gamma\beta} = (\nabla_\beta E_\gamma)^\alpha$ suggereix la possibilitat d'emprar en Σ un sistema de coordenades arbitrari $\{ x^{\alpha'} \}$, $x^{\alpha'} = x^{\alpha'}(x^\alpha)$, de vectors base associats $E_{\alpha'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} E_\alpha$. Llavors, aplicant directament la definició de $\Gamma^\alpha_{\gamma\beta}$, es dedueix fàcilment la llei general de transformació dels camps de galga:

$$\Gamma^{\alpha'}_{\beta'\gamma'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\gamma'}} \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} + \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{\beta'} \partial x^{\gamma'}}. \qquad (10)$$

Aquesta equació explicita la natura no tensorial de Γ i el fort paral·lelisme amb la llei de transformació (9) del potencial vector electromagnètic. Per exemple, ambdues lleis de transformació es caracteritzen per tenir un terme additiu afí. Aquest terme és el que possibilita que

[1] Alguns autors qualifiquen aquest fet dient que s'ha fixat el galga de Weyl.

en un esdeveniment fix, bé que arbitrari, una transformació de galga neutralitzi o compensi els camps i a la vegada, si es vol, també els pugui emular.

Amb la llei de transformació (10), la derivada covariant d'una magnitud tensorial esdevé també tensorial, per exemple:

$$\nabla_{\alpha'} \vee^{\beta'} = \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}} \nabla_{\alpha} \vee^{\beta} .$$

La utilització de sistemes de coordenades generals $x^{\alpha'} = x^{\alpha'}(x^{\alpha})$ focalitza l'interès en el grup de difeomorfismes, o sia, dels canvis diferenciables i invertibles de coordenades de Σ en lloc del grup de galga de Lorentz. Atès que els difeomorfismes infinitesimals els defineix un camp vectorial, $\epsilon^{\mu}(x) : x^{\alpha'} = x^{\alpha} + \epsilon^{\alpha}(x^{\alpha}), |\epsilon^{\alpha}| \ll 1$, arribem a les transformacions que experimenta el tensor Lorentzià $h_{\mu\nu}$ de la teoria lineal (vegeu la ref. 1). Però s'ha de tenir present que com que el grup de difeomorfismes no és un grup de Lie, aquesta metodologia s'aparta de la pura ortodòxia de les teories de galga clàssiques, les quals se sustenten en grups i àlgebres de Lie. Més endavant s'ampliarà aquest aspecte de la interacció gravitatòria.

Cal tornar a remarcar que en un esdeveniment fix però arbitrari, els camps de galga, respecte d'un sistema de coordenades, poden ser compensats per una transformació de galga i, en canvi, respecte d'un altre sistema de coordenades no, com demostren les equacions (7) i (8). Per tant, s'evidencia la necessitat d'un criteri objectiu, o sia, independent de l'observador, que permeti discriminar els camps gravitatoris creats pels sistemes físics, enfront dels camps emulats per transformacions de galga o bé pels difeomorfismes de Σ. Pel que fa a això, pot ser d'ajut recordar que, en la teoria galga U(1) del camp electromagnètic, es van discriminar els camps electromagnètics emulats per les transformacions de galga $A_{\mu} = \partial_{\mu}\alpha$, dels camps generats pels corrents elèctrics j^{β}, mitjançant la determinació del tensor camp electromagnètic $F_{\mu\nu}$. Aquest punt es desenvoluparà en l'apartat següent. Però per acabar el present apartat creiem pertinent obtenir una expressió aproximada de $\xi^{i}(x^{\alpha}; x_0)$. Tenint en compte les equacions (3) i (8), i que l'esdeveniment x_0 és l'origen de Σ i $\Sigma(x_0)$, s'obté el desenvolupament per Taylor de ξ^{i} fins a segon ordre en $|x^{\alpha^2}|$, on, com s'ha anticipat abans, els termes no lineals depenen dels camps de galga:

$$\begin{aligned} \xi^{i}(x^{\alpha}; x_0) &= L^{i}_{\alpha}(x_0)x^{\alpha} + \\ &+ \frac{1}{2} L^{i}_{\gamma}(x_0)\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}(x_0)x^{\alpha}x^{\beta} + O(|x^{\gamma}|^3). \end{aligned} \tag{11}$$

En la teoria de la gravitació newtoniana l'equació (11) s'ha de fer correspondre amb la coneguda transformació de coordenades:

$$t \to \xi^0 = t$$

$$\vec{r} \to \vec{\xi} = \vec{r} - \frac{1}{2}\vec{g}t^2,$$

on $(t, \vec{r})$ són les coordenades associades a les masses que generen la intensitat de camp gravitatori $\vec{g}$, i $(\xi^0, \vec{\xi})$ les corresponents a un laboratori en caiguda lliure. Per a una partícula en repòs respecte al laboratori, atès que $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{g}$, es constata que $\frac{d^2\vec{\xi}}{dt^2} = \vec{0}$, per tant la intensitat del camp gravitatori, s'ha compensat o neutralitzat dins el laboratori. Però el que no es pot neutralitzar dins el laboratori són els gradients de $\vec{g}$, anomenats *camps de marea*. Per exemple, una petita goteta líquida, idealment de tensió superficial pràcticament nul·la, adoptarà una forma el·lipsoïdal en lloc d'esferoïdal. Aquesta senzilla consideració ens indica que, en el límit newtonià, els camps de galga $\Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta}$ han de correspondre a la intensitat $\vec{g}$ del camp gravitatori newtonià.

Emprant una metàfora informàtica, es podria considerar que la visió newtoniana de la interacció gravitatòria proporciona un «manual d'usuari final» del «programa gravitatori» que, si bé permet efectuar càlculs acurats, no explica la física del «programa». En canvi, el principi d'equivalència obre una porta perquè ens puguem endinsar en el programa, i així analitzar si es pot millorar, ja que en relacionar íntimament gravitació i inèrcia, permet establir lligams entre la força gravitatòria i altres dominis de la física més familiars o fonamentals. No és gens estrany que A. Einstein qualifiqués la llei de la inèrcia com la clau de la física clàssica.

El camp gravitatori: curvatura de l'espai-temps

En el present apartat es determinaran els camps de marea relativistes, això és, la versió relativista dels gradients de la intensitat $\vec{g}$ del camp gravitatori newtonià. Atès que els camps de marea permeten discriminar objectivament els camps gravitatoris permanents dels purament emulats per transformacions de galga, els camps de marea han de representar en la teoria gravitatòria el que el tensor camp electromagnètic $F_{\mu\nu}$ representa per a la interacció electromagnètica.

Respecte d'això és convenient recordar (vegeu la ref. 1) que com que $F_{\mu\nu} = 0$ defineix les condicions d'integrabilitat del trasllat paral·lel en l'espai $\mathcal{P} = \mathcal{M}_4 \times \mathcal{U}(1)$ de la funció d'ona Ψ, ens porta a assajar un procediment semblant per a la interacció gravitatòria. Per fixar les idees, es considerarà el trasllat paral·lel del vector i-èsim $e_i(x_0)$ de $\Sigma(x_0)$, des de l'esdeveniment x_0 a l'esdeveniment x_1, al llarg d'una línia de món $C : s \to x^{\alpha}(s)$. Com que x_1 no ha de pertànyer al domini de definició de $\Sigma(x_0)$, s'emprarà el sistema de coordenades de domini més ample Σ. El subíndex i de $e_i(x_0)$ s'ubicarà entre parèntesis per recordar que $e_{(i)}(x_0)$ és un vector base fix de la tètrada de $\Sigma(x_0)$, bé que arbitrari. Respecte de Σ, la condició diferencial de trasllat paral·lel de $e_{(i)}$ la proporciona el sistema d'equacions:

$$\nabla_{\alpha} e_{(i)} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial e^{\mu}_{(i)}}{\partial x^{\alpha}} = -\Gamma^{\mu}_{\beta\alpha} e^{\beta}_{(i)}, \tag{12}$$

ja que respecte a $\Sigma(x_0)$ les condicions (12) equivalen a la constància dels components $e_{(i)}$, com s'explicita en l'equació (5) que defineix ∇. O sia, el concepte de trasllat paral·lel aplicat coincideix amb el de la geometria elemental.

Les condicions d'integrabilitat del sistema (12), això és, que el trasllat paral·lel de $e_{(i)}$ sigui independent de la línia de món que uneix els esdeveniments x_0 i x_1, s'obtenen d'imposar la simetria en les derivades parcials segones del primer membre:

$$\left(\Gamma^{\mu}_{\beta\alpha} e^{\beta}_{(i)}\right)_{,\nu} - \left(\Gamma^{\mu}_{\beta\nu} e^{\beta}_{(i)}\right)_{,\alpha} = 0$$

En desenvolupar les derivades parcials i aplicar (12), les condicions d'integrabilitat s'expressen en funció dels camps de galga o connexions, de la manera següent:

$$R^{\mu}_{\beta\alpha\nu} \equiv \Gamma^{\mu}_{\beta\alpha\nu} - \Gamma^{\mu}_{\beta\nu\alpha} + \Gamma^{\mu}_{\gamma\nu}\Gamma^{\gamma}_{\beta\alpha} - \Gamma^{\mu}_{\gamma\alpha}\Gamma^{\gamma}_{\beta\nu} = 0,$$

on s'ha introduït la definició de $R^{\mu}_{\beta\alpha\nu}$, atès que es transforma com a un tensor, tant sota les transformacions de galga com sota l'acció dels difeomorfismes de l'espaitemps. $R^{\mu}_{\beta\alpha\nu}$, es coneix amb el nom de *tensor de Riemann* de l'espaitemps. En la interacció gravitatòria $R^{\mu}_{\beta\alpha\nu}$, es correspon al tensor $F_{\mu\nu}$ de la interacció electromagnètica.

Per tant, si $R^{\mu}_{\beta\alpha\nu}$ és igual a zero, o sia, si el sistema (12) és integrable, la tètrada $e_{(i)}(x_0)$ es pot estendre unívocament a tot el domini de definició de Σ, atès que integrant l'equació (12) al llarg de C, s'obté:

$$e^{\mu}_{(i)}(x_1) = e^{\mu}_{(i)}(x_0) + \int_{C(x_0,x_1)} -\Gamma^{\mu}_{\beta\alpha} e^{\beta}_{(i)} \frac{dx^{\alpha}}{ds} ds,$$

on $e^{\mu}_{(i)}(x)$ és independent de la línia de món C que uneix els esdeveniments x_0 i x_1. En conseqüència $\Sigma(x_0)$ es pot estendre a tot l'espaitemps descrit per Σ, suposat minkowskià. Però, potser sorprenentment, les coordenades de $\Sigma(x_0)$ són les que s'han d'associar a les d'un referencial inercial global de la relativitat especial, ja que respecte a les coordenades lorentzianes de Σ es manifesten els efectes gravitatoris emulats per les transformacions de galga: $E_{\alpha} = L^{i}_{\alpha}(x) e_i(x)$. O sia, en lloc de les coordenades lorentzianes x^{α}, són les ξ^i les que s'han d'identificar amb les coordenades inercials de la relativitat especial, quan el tensor de Riemann $R^{\mu}_{\beta\alpha\nu}$ és zero. Com que en l'espaitemps minkowskià el trasllat paral·lel de les magnituds tensorials és independent de la línia de món, s'acaba de demostrar que el seu tensor de Riemann necessàriament ha de ser zero. En l'apèndix es demostra que el límit newtonià del tensor de Riemann coincideix amb els gradients de la intensitat $\vec{g}$ del camp gravitatori newtonià. Aquest fet posa en evidència que en el context de la teoria de Newton-Cartan les condicions d'integrabilitat (12) impliquen que $\vec{g}$ = constant i, per tant, es tracta d'un camp gravitatori generat per una transformació pura de galga i no per masses.

En canvi, en presència de camps gravitatoris permanents, o sia generats pels sistemes físics, l'espaitemps no es podrà representar per l'espaitemps de la relativitat especial, ja que $R^{\mu}_{\beta\alpha\nu} \neq 0$. L'espaitemps s'haurà de considerar un espai corbat, la curvatura del qual es mesura mitjançant $R^{\mu}_{\beta\alpha\nu}$, de la mateixa manera que la curvatura de l'espai $\mathcal{P}$ es mesura mitjançant $F_{\mu\nu}$. En l'apartat següent s'aprofundirà en aquest aspecte i en la natura mètrica de l'espaitemps. Es ratificarà que l'espaitemps minkowskià, en presència de camps gravitatoris permanents, queda buit de significació física i, per tant, no pot representar l'estructura causal, espacial i temporal entre els esdeveniments del món de la física. Però com postula el principi de galga o d'equivalència, aquesta estructura es preserva *localment*, mitjançant els referencials inercials locals $\Sigma(x_0)$.

Inobservabilitat de l'espaitemps minkowskià: la visió geomètrica galga del camp gravitatori

En els apartats anteriors s'ha desenvolupat el principi d'equivalència d'Einstein dins del marc de les teories de galga clàssiques, amb l'objectiu de descobrir la naturalesa fisicomatemàtica dels objectes galga que descriuen la interacció gravitatòria. S'ha demostrat que aquests objectes pertanyen a l'estructura geomètrica de l'espaitemps, ja que els camps de galga o connexió defineixen la derivada covariant, o sia l'estructura afí. I a partir dels camps de galga es construeix el tensor de Riemann o curvatura, que discrimina objectivament la presència de camps gravitatoris permanents, enfront dels purament emulats per les transformacions de galga o pels difeomorfismes de l'espaitemps.

Però encara no s'han exposat totes les conseqüències que es deriven del principi d'equivalència, o visió local de la interacció gravitatòria. En resta una de fonamental. En efecte, seguidament es demostrarà que la interacció gravitatòria determina l'estructura mètrica de l'espaitemps, a partir de la qual es deriven els camps de galga i el tensor de curvatura. Aquest aspecte evidencia la natura molt peculiar, per no dir única, que posseeix el camp gravitatori considerat com a camp de galga, ja que els camps de galga gravitatoris són entitats reduïbles al nivell mètric, fet que no té lloc en la resta de teories galga.

Per demostrar-ho es tornarà a considerar el referencial inercial local $\Sigma(x_0)$. En $\Sigma(x_0)$ el principi d'equivalència requereix que l'element de línia ds^2, entre l'esdeveniment origen x_0 i un altre infinitesimalment proper, de coordenades $d\xi^i$ respecte de $\Sigma(x_0)$, s'expressin com en relativitat especial:

$$ds^2 = \eta_{ij}(x_0) d\xi^i d\xi^j, \tag{13}$$

on $\eta_{ij}(x_0) = e_i(x_0) e_j(x_0) = \eta_{ij}$ és la mètrica minkowskiana.

Tenint en compte que $\nabla_i(e_j)_{x_0} = e_k(x_0)\Gamma^k_{ji}(x_0) = 0$, se segueix:

$$\eta_{ij}(x_0) = e_i(x_0)\cdot e_j(x_0) =$$
$$= e_i(x_0+\delta x_0)\cdot e_j(x_0+\delta x_0) = \eta_{ij}(x_0+\delta x_0).$$

Per tant les derivades primeres de la mètrica en x_0, i respecte de $\Sigma(x_0)$, són zero. Resultat que ratifica la sentència que afirma que la mètrica és localment minkowskiana:

$$\left(\frac{\partial \eta_{ij}}{\partial \zeta^k}\right)_{x_0} = 0 \tag{14}$$

O sia, la mètrica de l'espaitemps respecte a $\Sigma(x_0)$ coincideix, com a mínim fins a segon ordre, amb la minkowskiana. Però respecte al sistema de coordenades Σ no és així, ja que per bé que en x_0 coincideix amb la mètrica minkowskiana, les derivades primeres són diferents de zero. En efecte, substituint en l'element de línia (13) la llei de transformació (1) s'obté:

$$ds^2 = \eta_{ij}(x_0)d\zeta^i d\zeta^j =$$

$$\eta_{ij}(x_0)\left(\frac{\partial \zeta^i\,(x\alpha;x_0)}{\partial x\alpha}\right)_{x_0}\left(\frac{\partial \zeta^j\,(x\beta;x_0)}{\partial x\beta}\right)_{x_0} dx^\alpha dx^\beta \equiv \tag{15}$$
$$\equiv g_{\alpha\beta}(x_0)dx^\alpha dx^\beta.$$

Aplicant l'expressió (3) es verifica $g_{\alpha\beta}(x_0) = \eta_{ij}(x_0)L^i_\alpha L^j_\beta = \eta_{\alpha\beta}(x_0)$, però un càlcul directe demostra que les derivades primeres no són nul·les:

$$\left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}\right)_{x_0} = \eta_{ij}\left[\frac{\partial^2\zeta^i}{\partial x^\gamma \partial x^\alpha}\frac{\partial \zeta^j}{\partial x^\beta} + \frac{\partial \zeta^i}{\partial x^\alpha}\frac{\partial^2 \zeta^j}{\partial x^\beta \partial x^\gamma}\right]_0 =$$
$$= g_{\alpha\mu}\Gamma^\mu_{\beta\gamma} + g_{\beta\mu}\Gamma^\mu_{\alpha\gamma_{x_0}}. \tag{16}$$

Aquesta equació proporciona el lligam entre la mètrica i la connexió o camp de galga. En efectuar dues permutacions cícliques en els índexs ($\alpha \to \beta \to \gamma$) s'obtenen dues equacions equivalents tals, que sumant la primera a l'equació (16) i seguidament restant la segona, es poden aïllar els camps de galga en funció de les derivades de la mètrica:

$$(\nabla_\gamma E_\beta)^\alpha = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}g^{\alpha\mu}\left(\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{\mu\gamma}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^\mu}\right). \tag{17}$$

Les equacions (14) i (16) geomètricament expressen que la derivada covariant de la mètrica de l'espaitemps sempre és zero:

$$\nabla_\gamma g_{\alpha\beta} = 0.$$

Les mesures efectuades mitjançant els rellotges i regles estàndard en un laboratori (referencial) de coordenades associades a les x^α de Σ, ratifiquen experimentalment que la mètrica de l'espaitemps és la $g_{\alpha\beta}(x^\gamma)$ i no la minkowskiana. Ara esdevé pertinent recordar que fins ara s'ha suposat, a priori, que l'espaitemps era minkowskià i de mètrica $\eta_{\alpha\beta}$ respecte a Σ. Per tant, es pot pensar que s'ha comès un greu error de partença, però no és així, perquè solament s'ha fet una innecessària suposició equivocada. Tot el desenvolupament realitzat només requereix que, en l'esdeveniment x_0, es verifiqui la igualtat $g_{\alpha\beta}(x_0) = \eta_{\alpha\beta}$, punt que l'equació (15) demostra que és correcte. En resum, i com s'ha anticipat a la fi de l'apartat anterior, l'espaitemps minkowskià , en presència de camps gravitatoris permanents, queda buit de contingut mètric i sols es pot emprar per etiquetar els esdeveniments de l'espaitemps. L'espaitemps s'ha de representar com a una varietat quadridimensional de mètrica pseudoriemanniana[2] $g_{\alpha\beta}(x^\gamma)$ sobre la qual es construeix l'estructura galga representada per la connexió i el tensor de curvatura. Els tres nivells de l'estructura geomètrica de l'espaitemps, mètrica, connexió i curvatura, s'empren per descriure completament els múltiples aspectes de la interacció gravitatòria, com ja va demostrar A. Einstein el 1915. Per exemplificar-lo, en l'apèndix del present article s'exposaran tres aplicacions rellevants, cadascuna de les quals es refereix a un dels nivells esmentats.

Ara s'està en disposició d'esbrinar a quin dels tres nivells correspon la formulació de la interacció gravitatòria mitjançant el tensor $h_{\mu\nu}$ resumida en la ref. 1. De l'anàlisi de l'equació de camp per $h_{\mu\nu}$, es pot concloure que la teoria lineal, en tractar-se del primer estadi d'un procés iteratiu d'aproximacions successives, esdevé aplicable en el domini dels camps gravitatoris febles. En aquestes situacions físiques és raonable suposar que l'espaitemps «s'aproximarà» a l'espaitemps minkowskià. Per exemple, en el sentit que el domini d'aplicabilitat del referencial inercial local $\Sigma(x_0)$ abastarà una amplia regió de l'espaitemps. En aquestes regions és lògic fer la hipòtesi que la mètrica $g_{\alpha\beta}$ s'aproximarà a la minkowskiana:

$$g_{\alpha\beta}(x^\gamma) = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}(x^\gamma), \quad |h_{\alpha\beta}| \ll 1.$$

O sia, el camp $h_{\mu\nu}$ es pot interpretar com una correcció a la mètrica minkowskiana. Però si es persevera a interpretar $h_{\mu\nu}$ com un camp definit en l'espaitemps minkowskià, s'ha de recordar que la mètrica determinada per les mesures efectuades mitjançant els rellotges i regles estàndard és $g_{\alpha\beta}$ i no $\eta_{\alpha\beta}$. Altrament, en analitzar els resultats dels experiments s'ha de discriminar entre els patrons físics reals, les mesures dels quals estan d'acord amb les prediccions deduïdes a partir de $g_{\alpha\beta}$, i els «patrons» exclusivament matemàtics associats a $\eta_{\alpha\beta}$. Aquesta dualitat, artificial sota un punt de vista físic, és, doncs, del tot innecessària.

[2] L'estructura geomètrica diferencial de les varietats pseudoriemannianes es defineix axiomàticament mitjançant les dues equacions:
$\nabla_\gamma g_{\alpha\beta} = 0$, la mètrica és covariantment constant.
$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} - \Gamma^\alpha_{\gamma\beta} = 0$, el tensor torsió és zero.

Això recorda l'èter electromagnètic de la teoria de Lorentz-Maxwell, que per evitar les contradiccions a què conduïa, es va haver de buidar de qualsevol contingut físic que pogués fer-lo detectable.

Pel que fa referència a les transformacions de $h_{\alpha\beta}$, anomenades també *de galga*, s'han d'interpretar com a transformacions infinitesimals de coordenades,

$$x^{\alpha'} = x^\alpha + \epsilon^\alpha(x^\beta), \quad |\epsilon^\alpha| \ll 1,$$

aplicables a la mètrica $g_{\alpha\beta}$. En efecte, negligint termes quadràtics en ϵ^α s'obté:

$$g'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^\beta g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\beta'}} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} + \partial_\alpha \epsilon_\beta + \partial_\beta \epsilon_\alpha. \quad (18)$$

Aquesta visió galga, que per exemple adoptà R. P. Feynman en el curs de doctorat que impartí a Caltech el curs 1961/62, i que és compartida per molts físics relativistes i de partícules fonamentals, planteja la qüestió: on encaixa la visió galga més «ortodoxa» fonamentada en la localització del grup de Lorentz, que s'ha seguit en el present article? En l'apartat següent es respon a aquesta qüestió.

La teoria einsteiniana com a teoria de galga

La resposta a la pregunta que es plantejava al final de l'apartat anterior, coherent amb la interpretació galga del principi d'equivalència, requereix algunes matitzacions que s'estima oportú exposar. Primer, s'ha de recordar que el grup de simetria de la física en l'espaitemps minkowskià és el de Poincaré, o sia, les transformacions de Lorentz no homogènies: $x^{\alpha'} = L^{\alpha'}_\beta x^\beta + d^\alpha$. Segon, en el procés de localització del grup de Poincaré global, s'ha optat per dividir-lo en dues parts:

$$L^{\alpha'}_\beta \to L^{\alpha'}_\beta(x),$$

$$d^{\alpha'} \to d^{\alpha'}(x).$$

Aquestes dues parts, com seguidament s'explicarà, actuen sobre espais diferents. S'ha demostrat que l'espaitemps és una varietat pseudoriemanniana en la qual, i sobre cada esdeveniment, s'erigeix una tètrada de vectors ortonormalitzats:

$$\{e_i(x); \eta_{ij} = e_i(x) \cdot e_j(x) = g_{\alpha\beta}(x) e^\alpha_i(x) e^\beta_j(x)\}.$$

La tètrada $\{e_i(x)\}$ pertany a l'espai vectorial tangent a l'espaitemps en l'esdeveniment x i alhora el genera, és precisament sobre aquest espai tangent que es considera que actua el grup de Lorentz local $e_{i'}(x) = L^i_{i'}(x) e_i(x)$. En conseqüència, l'espai tangent a cada esdeveniment es pot interpretar com l'espai «intern» de la teoria de galga de grup estructural $L^i_{i'}(x)$.

Respecte a la localització dels desplaçaments del grup de Poincaré $d^{\alpha'}(x)$, es poden interpretar com el grup d'automorfismes $x^{\alpha'} = d^{\alpha'}(x^\alpha)$ entre els esdeveniments de l'espaitemps. L'equació (18) és un exemple d'actuació dels automorfismes infinitesimals. Sota un punt de vista passiu els automorfismes representen un simple canvi de coordenades, i sota un punt de vista actiu, transformen un esdeveniment en un altre de diferent. Per tant, la diferencial de l' automorfisme,

$$dx^{\alpha'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} dx^\alpha,$$

relaciona els espais tangents respectius.

Evidentment són possibles, i s'han proposat, altres tipus de localització del grup de Poincaré, però donen lloc a teories galga de la interacció gravitatòria que no condueixen a la relativitat general.

La localització del grup de Poincaré, que s'acaba d'explicar, és l'adoptada en el present article i la que, implícitament, va emprar R. Utiyama (1956). R. Utiyama va suposar de bell antuvi l'espaitemps de la relativitat general, conjuntament amb un sistema de coordenades admissibles x^α, per etiquetar els esdeveniments x, i un camp de tètrades ortonormalitzades $e_i(x)$.

Siguin $e^\alpha_i(x)$ els components contravariants de la tètrada respecte dels vectors base associats al sistema de coordenades, llavors la condició d'ortonormalització de la tètrada implica la cadena d'igualtats següent:

$$\eta_{ij} = e_i(x) \cdot e_j(x) = g_{\alpha\beta}(x) e^\alpha_i(x) e^\alpha_j(x) = e_{\alpha i}(x) e^\alpha_j(x)$$

$$g_{\alpha\beta}(x) = \eta_{ij} e^i_\alpha e^j_\beta(x) = e_{i\alpha}(x) e^i_\beta(x),$$

On els índexs llatins s'empren per a magnituds referides a la tètrada i els índexs grecs es refereixen als vectors base associats a les coordenades. Els índexs llatins es «mouen» amb η_{ij} i els grecs amb $g_{\alpha\beta}$. Utiyama va considerar com a fonamentals els setze camps $e^\alpha_i(x)$, a partir dels quals s'expressen la resta d'entitats geomètriques de l'espaitemps, per exemple, $g_{\alpha\beta} = \eta_{ij} e^i_\alpha e^j_\beta$. S'ha de tenir present que e^α_i està definit, llevat d'una transformació de galga, o sia, de Lorentz $e^\alpha_{i'}(x) = L^i_{i'}(x) e^\alpha_i(x)$. L'elecció d'un camp de tètrades equival a fixar el galga, també anomenat de Weyl.

D'acord amb les equacions (7) i (8) de l'apartat anterior, el camp de galga o connexió admet l'expressió següent:

$$\nabla_\alpha e_i(x) = e_k(x) \Gamma^k_{i\alpha}(x). \quad (19)$$

Aquesta representació esdevé idònia per explicitar la significació del camp de galga com una 1-forma a valors en l'àlgebra de Lie del grup de galga, o sia, el de Lorentz en el cas gravitatori (vegeu, per exemple, la ref. 1). Per a demostrar-ho, primer s'ha de tenir en compte que l'ortonormalització del camp de tètrades implica l'antisimetria en els índexs llatins de la connexió, o sia, $\Gamma_{ki\alpha} = -\Gamma_{ik\alpha}$. Segon, s'ha de recordar que els sis generadors infinitesimals del grup de Lorentz $T^{ki} = -T^{ik}$

en la representació vectorial, tenen els components següents:

$$(T^{kl})^i_j = -\left[\delta^k_j \delta^l_m - \delta^l_j \delta^k_m\right] \eta^{im}.$$

Llavors, si es defineix la 1-forma

$$\Gamma_\alpha \equiv \frac{1}{2} T^{kl} \Gamma_{kl\alpha},$$

l'expressió (19) s'expressa com s'ha anticipat:

$$\Gamma_\alpha e_i = e_m \frac{1}{2} (T^{kl})^m_i \Gamma_{kl\alpha}.$$

Cal dir que aquesta representació del camp de galga o connexió és la idònia per determinar l'acoblament dels camps quàntics amb el camp gravitatori clàssic, atès que sols cal substituir en les equacions de camp quàntic:

$$\partial_\mu \to \nabla_\mu = \partial_\mu + \Gamma_\mu$$

i emprar la representació dels generadors T^{kl} d'acord amb la naturalesa lorentziana del camp quàntic. De fet, és l'única manera d'acoblar els camps espinorials (per exemple, l'electró) amb el camp gravitatori clàssic.

Conclusions

L'estructura fisicomatemàtica de les teories de galga es fonamenta en una profunda interrelació entre els tres elements: *simetria*, *dinàmica* (entesa com les lleis que obeeixen les interaccions), i *lleis de conservació*. En els punts següents es reflexiona sobre aquests aspectes bàsics:

1. És habitual definir la simetria d'una teoria com el conjunt de transformacions (grup de simetria) que deixa les lleis de la teoria invariants. Això vol dir que si les lleis dinàmiques s'interpreten com a relacions entre objectes geomètrics, aquestes relacions resten invariants sota l'acció del grup de transformacions. Respecte d'aquest fet, ha esdevingut crucial per avançar en el coneixement de les interaccions fonamentals, discriminar entre invariància *global* i invariància *local*.

   En la invariància *global*, s'efectua la mateixa transformació en tots els esdeveniments de l'espaitemps i, per tant, els paràmetres del grup són independents dels esdeveniments de l'espaitemps. En canvi, en la invariància *local* es té llibertat per efectuar transformacions diferents en cada punt de l'espaitemps, o sia, els paràmetres del grup passen a ser funcions de l'esdeveniment. Aquesta localització del grup G de simetria, $G \to G(x)$, té l'efecte de convertir una simetria cinemàtica G en una simetria dinàmica $G(x)$. En efecte, ha quedat palès que quan una teoria té una simetria global G i es força que la simetria sigui local $G(x)$, llavors, per preservar-la, cal la introducció d'uns nous camps, això és, d'una nova interacció. Aquesta nova interacció s'acobla al sistema original d'una manera definida (derivada covariant galga o acoblament mínim), i a la vegada es transforma d'una manera específica sota l'acció del grup de simetria local. Aquests camps són els anomenats *camps de galga*. Matemàticament es representen mitjançant 1-formes que prenen valors sobre l'àlgebra de Lie del grup de simetria.

   Els camps de galga defineixen la derivada covariant galga, $\nabla_\mu = \partial_\mu + \Gamma_\mu$, en l'anomenat *espai fibrat principal del grup estructural* $G(x)$. Intuitivament, aquest espai consisteix a afegir a cada esdeveniment de l'espaitemps una còpia de l'espai de simetria. Físicament, la substitució $\partial_\mu \to \nabla_\mu$ introdueix en les equacions del sistema original el seu acoblament amb els camps de galga.

   Si el grup de simetria és commutatiu (abelià), els camps de galga obeeixen equacions lineals. L'exemple paradigmàtic d'aquest cas el proporciona la interacció electromagnètica, en què $G = U(1)$, (vegeu la ref. 1).

   En canvi, si el grup de simetria no és commutatiu, els camps de galga obeeixen equacions no lineals. Per exemple, si $G =$ Lorentz anem a parar a la relativitat general, com ha quedat palès en el present article. En aquest únic cas, els camps de galga són deduïbles a partir de la mètrica de l'espaitemps. Si $G = SU(2)$[3], s'obtenen els camps de Yang i Mills, si $G = SU(3)$, la versió quàntica dels camps de galga (gluons) esdevé la base de la cromodinàmica quàntica.

2. Si es relaxen alguns punts del principi d'equivalència d'Albert Einstein, en interpretar-lo com a principi de galga, s'obtenen altres teories matemàtiques, com ara, la de Kibble (1961), les de connexions no simètriques (torsió no nul·la), que en els darrers anys han tingut un renaixement sorprenent i actualment mereixen molta atenció per alguns grups d'investigadors, etc.

3. Pel que fa a la relació entre les lleis de conservació i la simetria de les lleis dinàmiques, es concreta habitualment aplicant els dos teoremes de E. Noether, dins el context lagrangià de la teoria.

   La interpretació geomètrica explicita clarament que les lleis de conservació, derivades de la invariància galga, es verifiquen automàticament, ja que les fonts del camp de galga, tot i mantenir graus de llibertat propis, no poden modificar-se arbitràriament en l'espaitemps, en estar lligades al camp que generen a través d'unes identitats, segons demostra el segon

[3] $SU(2)$ és el grup definit per les matrius unitàries (2×2) de determinant unitat, i $SU(3)$ correspon a matrius (3×3).

teorema de E. Noether. J. A. Wheeler sintetitza aquesta visió amb el principi topològic que afirma: «el contorn d'un contorn és sempre zero». Pensem que aquest aspecte, així com les interessants i fecundes conseqüències topològiques de les teories de galga clàssiques, mereixen un estudi propi, raó per la qual no s'han esmentat en el present article ni en la ref. 1. Tant és així, que alguns físics rellevants diuen que s'ha construït en els darrers vint anys una «industria» teòrica al seu voltant.

4. La visió galga explicita el paral·lelisme matemàtic, que no físic, entre els camps electromagnètic i gravitatori: per exemple, ambdós camps es representen mitjançant 1-formes a valors en l'àlgebra de Lie dels respectius grups de galga. Aquesta observació va ser desenvolupada per primera vegada el 1929 per H. Weyl, i immediatament acceptada i propagada per W. Pauli.

   Però sota el punt de vista físic, la teoria galga del camp gravitatori einsteinià se singularitza, en requerir els tres nivells: mètrica de l'espaitemps, connexió–camp de galga i curvatura enfront dels dos nivells camp de galga i curvatura de la resta d'interaccions. Aquest fet reflecteix que **tot** sistema físic, en posseir energia, ha de generar camp gravitatori, això és, ha d'influenciar l'estructura de l'espaitemps, i a la vegada el camp gravitatori, o sia l'espaitemps, s'ha d'acoblar als sistemes físics mitjançant les equacions dels camps definides en l'espaitemps. J. A. Wheeler ho sintetitza amb la frase: *«L'espaitemps diu als sistemes físics com s'han de moure i els sistemes físics diuen a l'espaitemps com s'ha de corbar»*.

Apèndix

Com s'ha anticipat abans, en el present apèndix s'exposaran tres exemples il·lustratius de la manifestació de la interacció gravitatòria clàssica en els tres nivells: mètric, de camp de galga o connexió i de curvatura.

1. **Nivell mètric**
   El camp de cons de llum $g_{\alpha\beta}(x)\delta x^\alpha \delta x^\beta = 0$ determina l'estructura causal de l'espaitemps. D'acord amb el principi d'equivalència, localment s'incorpora a l'espaitemps l'estructura tant causal com mètrica de la relativitat especial. En particular, es postula que l'interval de temps propi $\Delta\tau$, mesurat per un rellotge estàndard transportat al llarg de la línia de món $s \to x^\alpha(s)$ que uneix els esdeveniments A i B, és

$$\Delta\tau = \int_{S_A}^{S_B} \sqrt{g_{\alpha\beta}(x(s))\dot{x}^\alpha(s)\dot{x}^\beta(s)}ds.$$

2. **Nivell de camp de galga**
   Siguin $\zeta^i = \zeta^i(\tau)$ les coordenades de la línia de món d'una partícula monopolar en caiguda lliure respecte de $\Sigma(x_0) = \Sigma(x^\alpha(\tau_0))$. Atès que τ és el temps propi, la quadrivelocitat de la partícula en τ_0 és $u(\tau_0) = (d\zeta^i/d\tau)_0 e_i(x_0)$. En $x^\alpha(\tau_0)$, d'acord amb el principi d'equivalència, s'ha de verificar la cadena d'igualtats:

$$0 = \frac{d^2\zeta^i}{d\tau^2}e_i = \frac{du^i}{d\tau}e_i = \frac{d\zeta^k}{d\tau}\frac{\partial u^i}{\partial \zeta^k}e_i = u^k\nabla_k u. (A1)$$

   Per tant, respecte d'un sistema de coordenades general, l'equació de moviment d'una partícula en caiguda lliure és:

$$0 = u^\alpha \nabla_\alpha u = \frac{du^\beta}{d\tau} + \Gamma^\beta_{\alpha\gamma}u^\alpha u^\gamma, \quad \text{on} \qquad u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}.$$

   Sota un punt de vista geomètric, aquestes equacions mostren que la quadrivelocitat d'una partícula en caiguda lliure es trasllada paral·lelament al llarg de la seva línia de món. Dit d'una altra manera, la quadriacceleració de la partícula $a = \nabla_u u$ és zero. O sia, totes les partícules monopolars, independentment de la seva massa i constitució, en caiguda lliure tenen quadriacceleració nul·la.

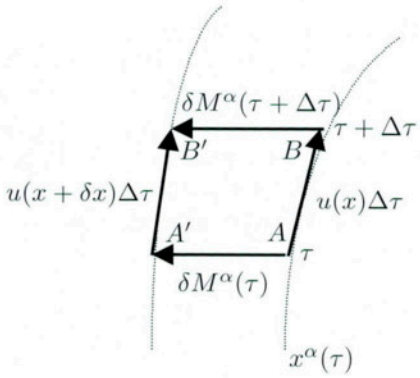
   El principi d'equivalència pressuposa la igualtat exacta entre les masses inercial i gravitatòria, és més, no requereix aquesta discriminació newtoniana. Per tant, si la igualtat exacta no es verifiqués, la teoria construïda deixaria automàticament de ser vàlida. Les línies de món de les partícules en caiguda lliure coincideixen amb les geodèsiques de l'espaitemps, atès que la seva equació també es dedueix del principi variacional $\delta \int d\tau = 0$.

3. **Nivell de curvatura**
   Pel que fa a l'exemple del tercer nivell, o sia, com actua la curvatura de l'espaitemps sobre els sistemes físics, es considerarà el senzill sistema constituït per dues partícules, molt properes, en caiguda lliure. Una de les partícules servirà de partícula de referència per determinar respecte a ella el moviment de la partícula veïna.

   Sigui $x^\alpha(\tau)$ la geodèsica de la partícula de referència i $x^\alpha(\tau) + \delta x^\alpha(\tau)$ la de la partícula veïna. τ és el temps propi de la primera partícula i $\delta M^\alpha \equiv \delta x^\alpha(\tau)$, el vector connector d'ambdues partícules per a cada τ, com es pot veure en la figura següent.

   L'acceleració relativa a_r de la partícula veïna respecte a la de referència és

$$a_r = \nabla_u \nabla_u \delta M(\tau)$$



És útil expressar l'acceleració relativa a_r de la manera equivalent següent:

$$a_r(\tau) = (\nabla_u \nabla_{\delta M} - \nabla_{\delta M} \nabla_u) u,$$

com es demostra fàcilment en tenir en compte que $a = \nabla_u u = 0$, i $\nabla_u \delta M - \nabla_{\delta M} u = 0$, igualtat que es dedueix en desenvolupar fins a primer ordre els dos circuits de la figura:

$$AB' = AA' + A'B' = AB + BB'.$$

Seguidament, en tenir en compte que el tensor de Riemann es pot expressar en funció del commutador de les derivades covariants, l'acceleració relativa a_r s'escriu:

$$a_r^\alpha = -R^\alpha_{\beta\gamma\delta} u^\beta \delta M^\gamma u^\delta . (A2)$$

O sia, l'acceleració relativa és zero, si i només si ho és el tensor de Riemann, això és, en absència de camps gravitatoris permanents.

En aquest estadi és fàcil relacionar d'una manera molt directa la teoria relativista amb la teoria de la gravitació newtoniana, la qual esdevé una aproximació vàlida per a velocitats petites ($v \ll c$) i camps febles ($GM/c^2R \ll 1$). En efecte, si $\vec{g} = -\nabla\Theta$ és la intensitat del camp gravitatori newtonià, Θ el potencial escalar i $\delta\vec{M}$ el trivector que uneix dues partícules properes, llavors el trivector acceleració relativa $\vec{a}_r$ s'expressa:

$$\begin{aligned} \vec{a}_r = \frac{d^2}{dt^2}\delta\vec{M} &= \vec{g}\left(\vec{x} + \delta\vec{M}\right) - \vec{g}(\vec{x}) = \\ &= \hat{e}_i \frac{\partial^2\Theta}{\partial x^i \partial x^k} \delta M^k, \end{aligned}$$

On t és el temps absolut newtonià. En comparar aquesta equació amb la (A2) referida a $\Sigma(x_0(\tau_0))$, escollint el vector base temporal $e_0(x_0)$ igual a la quadrivelocitat u, s'obté la correspondència:

$$a_r^i = -R^i_{0k0}\delta M^k \sim -\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^i \partial x^k}\delta M^k.$$

Aquesta correspondència indueix a interpretar físicament el tensor curvatura de l'espaitemps com el camp de marea relativista. El límit newtonià de l'equació de les geodèsiques (A1) fa correspondre els camps de galga o connexió amb la intensitat $\vec{g}$ del camp gravitatori newtonià i, per tant, el potencial escalar Θ s'ha d'associar al nivell mètric.

Indiquem que, a partir del tensor de Riemann, es defineix el tensor de Ricci $R_{\alpha\beta} \equiv R^u_{\alpha\mu\beta}$, l'escalar curvatura $R = R^\alpha_\alpha$ i el tensor d'Einstein $G_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R$, el qual constitueix el primer membre de les equacions d'Einstein.

Per finalitzar l'apèndix, és il·lustratiu observar que si es calcula el tensor d'Einstein $G_{\alpha\beta}$, emprant la mètrica $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$, fins a primer ordre en $h_{\alpha\beta}$, s'obtenen per a $h_{\alpha\beta}$ les equacions de la teoria lineal (vegeu la ref. 1). Per tant s'ha d'inferir que el límit del procés iteratiu que s'empra en la teoria lineal per intentar de superar les seves inconsistències, ha de conduir a les equacions d'Einstein de la relativitat general:

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi G T_{\alpha\beta},$$

a partir de la qual es determina l'estructura fisico-geomètrica de l'espaitemps.

Referències

GRAELLS, J. i MARTIN, C., Els Camps de Galga clàssics i la interacció electromagnètica, *Revista de Física*, **3**, núm. 2, 4-13.

O'RAIFEARTAIGH, L., *The dawning of Gauge Theory*, Princeton University Press (1997).

YANG, C. N., «Geometry and Physics», A: NE'EMAN, Y. (ed.), *To fulfill a Vision. Jerusalen Einstein Centennial Symposium.* Addison Wesley (1981)

RINDLER, W., *Essential Relativity*, 2a ed. revisada, Springer Verlag (1979).

LEITE LOPES, J., *Gauge Field Theories. An Introduction*, Pergamon Press (1981).

FEYNMAN, R. P., MORINIGO F., B. i WAGNER, W. G., *Feynman Lectures on Gravitation*, Ed. B. Hatfield. Addison Wesley (1985).

RAMOND, P., *Field Theory: A modern primer*, 2a ed., Addison Wesley (1989).

GRAELLS, J. i MARTIN, C., La interacció gravitatòria: de Newton a Einstein o de l'espai i temps absoluts newtonians a la geometrodinàmica einsteiniana, *Revista de Física*, **2**, núm. 9, 34-47.